230	**Probabilité conditionnelle et indépendance. Variables aléatoires indépendantes. Variance, covariance.**	Caractérisation de la loi exponentielle par son absence de mémoire.	Escoffier

Soit (Ω, $\mathcal{A}$, P) un espace probabilisé.

I. Cas de deux événements. p.21.

A. Probabilité conditionnelle.

On suppose un événement B réalisé. On va modifier P pour tenir compte du fait que B est supposé réalisé.

Def 1: Soit B un événement de probabilité ≠0.
On appelle probabilité conditionnelle à B, ou **probabilité sachant B**, associée à P, l'application:

$P_B : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$; $A \mapsto P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

On note aussi P(A/B) pour $P_B(A)$.

Prop 1: L'application P_B est une probabilité sur (Ω, $\mathcal{A}$).

Exemple (1.6, p.23): On considère deux urnes.
U_1 contient 2 boules blanches et 1 boule noire. U_2 contient 1 blanche et 1 noire. On note B l'événement "la boule tirée est blanche", E_1 "elle provient de U_1", E_2 "elle provient de U_2". Calculer $P_{E1}(B)$.

Application: Caractérisation de la loi Exponentielle par son absence de mémoire. Ex.6.8 p.131, corrigé p.138.

Prop 2: Formule des **probabilités composées.**
Soient A_1, A_2 ...A_n n événements tels que $P(A_1 \cap ... \cap A_n) \neq 0$, on a:

$$P(A_1 \cap ... \cap A_n) = P(A_1 / A_2 \cap .. \cap A_n) \times P(A_2 / A_3 \cap .. \cap A_n) \times ... \times P(A_{n-1} / A_n) \times P(A_n)$$

Issue par récurrence de P(A∩B) = P(A/B)×P(B).

Prop 3: **Formule des probabilités totales.** (1)
Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements. Alors: $\forall A \in \mathcal{A}$, $P(A) = \sum_{i\in I} P(A / A_i) P(A_i)$. (où ∀i, $P(A_i)$≠0)

Exemple (1.6 - suite): Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche?

Prop 4: **Formule de Bayes.** Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet. ∀n∈I, $P(A_n / A) = \dfrac{P(A / A_n) \times P(A_n)}{\sum_{i\in I} P(A / A_i) \times P(A_i)}$.

Issue de: $P(B / A) = \dfrac{P(A / B) \times P(B)}{P(A)}$

Exemple (1.6 - suite): On suppose que l'on a tiré une boule blanche; quelle est la probabilité que cette boule soit issue de l'urne U_1?

B. Indépendance.

On traduit le fait que la réalisation de l'un n'a pas d'influence sur la réalisation de l'autre.

Def 2: A est dit **indépendant** de B
si $P(A / B) = P(A)$ ou si $P(B) = 0$.

Ne pas confondre incompatibles (ne peuvent arriver en même temps, A∩B=∅, indep. du choix de la proba P) et indépendants (dépend du choix de la proba P).

Prop 5: (A indép. de B) ⇔ (P(A∩B) = P(A)×P(B))
La relation d'indépendance est symétrique, et on a indépendance entre A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exemple (1.8 p.25): On jette 1D6 équilibré. On note: A={2;4;6}; B={5;6}; C={5}. A et B sont indépendants, A et C ne le sont pas, non plus que B et C.

Généralisation: On définit comme suit l'indépendance de n événements A_1,...,A_n: Ils sont:

→ **Mutuellement indépendants** ssi $\forall I \subset [\![1, n]\!], I \neq \emptyset$,

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} A_i$$

→ **Indépendants dans leur ensemble** ssi

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

Indépendance mutuelle ⇒ Indep 2 à 2, réciproque fausse (Contre-exemple 1.9 p.26)

II. Cas de variables aléatoires réelles.

On se limitera dans la suite au cas de 2 variables.

A. Cas de v.a.r. discrètes. p.100

Soient X, Y deux v.a.r. discrètes sur (Ω, $\mathcal{A}$, P).

Notations: $X(\Omega) = \{x_i ; i \in I\}$; $Y(\Omega) = \{y_j ; j \in J\}$

$P((X;Y) = (x_i; y_j)) = p_{i,j}$;

$P(X = x_i) = \sum_{j\in J} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = p_{i,.}$

$P(Y = y_j) = \sum_{i\in I} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = p_{.,j}$

Exemple (5.1 p97): On lance deux fois 1D6 équilibré, et on note ω_1 le résultat du premier lancer, et ω_2 celui du second.
On pose $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$, et $Y(\omega) = \max(\omega_1; \omega_2)$.

a) Probabilité conditionnelle.

Def 4: La **loi** (2) **conditionnelle de Y sachant (X=x_i)**, notée $P_{[X=x_i]}$, est la donnée de

$$\left\{\left(y_j ; \frac{P(Y = y_j \cap X = x_i)}{P(X = x_i)}\right)_{j\in J}\right\}, \text{ie} \left\{\left(y_j ; \frac{p_{i,j}}{p_{i,.}}\right)_{j\in J}\right\}.$$

Exemple 5.1 p97: La loi conditionnelle de X sachant (Y=3) est:

$X_{[Y=3]}(\Omega)$	4	5	6
$P_{[Y=3]}(X = x_i)$	2/5	2/5	1/5

b) Indépendance.

Def 5: Deux **var** X et Y sont **indépendantes** ssi:
$\forall (B_1; B_2) \in (B_{\mathbb{R}})^2$,
$P((X \in B_1) \cap (Y \in B_2)) = P(X \in B_1) \times P(Y \in B_2)$
Dans le cas de **var discrètes**, c'est équivalent à:
$\forall (i; j) \in I \times J$,
$P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$
i. e. $p_{i,j} = p_{i,.} \times p_{.,j}$

Exemple 5.1 p97: Lex variables X et Y ne sont pas indépendantes: P((X=2)∩(Y=2))=0≠P(X=2)×P(Y=2)

c) Espérance, variance, covariance.

Def 6: (p.55) Soit X une var discrète.
On appelle **espérance de X** le réel:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i) \quad \text{si} \quad X(\Omega)=\{x_1;...;x_n\}$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{+\infty} x_i P(X=x_i) \quad \text{si} \quad X(\Omega)=\{x_i / i\geq 1\},$$

si cette dernière série converge absolument.

Prop 6: (p.58) **Linéarité de l'opérateur E.** Soient X, Y var discrètes sur Ω qui possèdent une espérance, et λ∈ℝ. Alors X+λY est une var discrète sur Ω qui possède une espérance, et $E(X+\lambda Y)=E(X)+\lambda E(Y)$

Th 1: Soient X et Y deux var discrètes <u>indépendantes</u> admettant une espérance, alors la var **XY** admet une espérance et $E(XY)=E(X).E(Y)$.
Récipque fausse, cette égalité ne rend pas X et Y indep.

Prop 7: (p.103) Soit F l'ens. des var discrètes sur le même (Ω,$\mathcal{A}$,P), et **F_1** le sous-ens. de celles qui possèdent une <u>espérance</u>. Alors:
F_1 est un s-ev de F, et **E est une forme linéaire** sur F_1.

Def 7: (p.61) On appelle **variance** de X l'espérance, si elle existe, de la variable $(X-E(X))^2$:

$$V(X)=E\left((X-E(X))^2\right)=\sum_i (x_i-E(X))^2 P(X=x_i)$$

Th. 2: **Formule de Koenig-Huygens**: Si V(X) existe, alors
$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$
La variance est (la my. des carrés) – (le carré de la my.)

Prop 8: (p.103) Soit **F_2** l'ens. des éléments de F qui possèdent une <u>variance</u>. F_2 est un **s-ev de F inclus ds F_1.**

Def 8: (p.104) L'application:

$$Cov:\begin{cases}(F_2)^2 \to \mathbb{R} \\ (X;Y)\mapsto E(XY)-E(X)E(Y)\end{cases}$$ est bien définie,

et est appelée **covariance** de X et de Y.
En particulier, si X et Y sont indep, Cov(X;Y)=0.

Prop 9: (adaptat° du cas n var) $\forall(X;Y)\in(F_2)^2$,
$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2.Cov(X;Y)$
Et si X et Y sont <u>indépendantes</u>:
$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

Prop 10: L'application **Cov** est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur l'ev. F_2.

d) Applications.

Th 3: Soient $X_1,...,X_n$ des var sur (Ω,$\mathcal{A}$,P) <u>indépendantes</u>, et qui suivent toutes une loi de **Bernoulli** de même paramètre p.

Alors leur **somme** $Z=\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi **binomiale** B(n,p), et l'on a E(Z)=np, et V(Z)=np(1-p).

Th 4: Soient $X_1,...,X_n$ des var sur (Ω,$\mathcal{A}$,P) <u>indépendantes</u>, et qui suivent toutes une loi **Binomiale**
$\forall i\in[\![1;n]\!],\ X_i \sim B(n_i;p)$. Alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B\left(\sum_{i=1}^{n} n_i;p\right)$.

Th 5: Soient $X_1,...,X_n$ des var sur (Ω,$\mathcal{A}$,P) <u>indépendantes</u>, et qui suivent toutes une loi **de Poisson**
$\forall i\in[\![1;n]\!],\ X_i \sim P(\lambda_i)$. Alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

B. Cas de v.a. possédant une densité. (p.140)

Soit V:Ω→ℝ², V(ω)=(X(ω);Y(ω)) admettant une densité, ie ∃ f: ℝ²→ℝ positive, tq $\iint_{\mathbb{R}^2} f=1$, et telle que:

$$\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2, P((X\leq\alpha)\cap(Y\leq\beta))=\int_{-\infty}^{\alpha}\int_{-\infty}^{\beta} f(x;y)\,dxdy$$

Les **densités marginales** de X et Y sont respectivemt:

$$f_X: x\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)\,dy \quad \text{et} \quad f_Y: y\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)\,dx$$

a) Indépendance.

Th.6: **Caractérisation de l'indépendance.** Si deux var X et Y de densité resp. f_X et f_Y sont indépendantes, alors le couple (X;Y) a pour densité $f_X f_Y$.
Réciproquement, soit V=(X;Y) de densité f. Si f se factorise sous la forme: ∀(x;y)∈ℝ², $f(x;y)=g(x)h(y)$, où g et h sont ≥0 et intégrables sur ℝ, alors X et Y sont indépendantes et
∃λ>0 tq: $f_X=\lambda g$, et $f_Y=\frac{1}{\lambda}h$.

Prop 11: Soient X et Y de densités resp. f et g.
Si X et y sont <u>indépendantes</u>, alors une **densité de X+Y** est h=f*g, produit de convolution de f et g.

$$h: t\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)\,dx$$

b) Covariance et coefficient de corrélation.

Prop 12: Soit (X;Y) un vecteur de densité f.
Si $(x;y)\mapsto |xy| f(x;y)$ est intégrable sur ℝ², alors XY est une var d'espérance: $E(XY)=\iint_{\mathbb{R}^2} xyf(x;y)\,dxdy$

Def 9: Si X et Y admettent une espérance, on appelle **covariance** de (X;Y) le réel:
$Cov(X;Y)=E(XY)-E(X).E(Y)$

Prop 13: Si X et y sont <u>indépendantes</u>, alors Cov(X;Y)=0
La réciproque est fausse.

III. Notes.

(1) **Système complet d'événements**: Toute famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$ tq: ∀i, $A_i \neq \emptyset$, ∀i≠j, $A_i \cap A_j = \emptyset$ (incompatibles deux à deux), et $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.

Un exemple usuel est $\{A;\overline{A}\}$.

(2) **Loi de probabilité** d'une variable aléatoire X:

$\mu : B_{\mathbb{R}} \to [0;1]$

$B \mapsto P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X = B)$

Probabilité de prise d'(intervalle de valeurs) par X

<u>Un autre critère d'indépendance</u>: Prop 6 de la 249

Prop 6: Soit $V = (X;Y)$ un vecteur normal.

Alors on a l'équivalence:

(X et Y sont indépendants) ssi (Cov(X;Y)=0)

<u>Un autre critère d'indépendance</u>: Prop 9 de la 249

Prop 9: Soit $V = (X;Y)$ un vecteur normal de matrice de variances-covariances Σ.

Les v.a.r. **X et Y sont indépendantes ssi** Σ est une matrice diagonale.

<u>Propriétés liées à l'indépendance</u> ds la cv en loi de suites de var (231)

Th 7: Loi faible des grands nombres. Soit (X_n) une suite de v.a.r. définies sur la même espace (Ω, $\mathcal{A}$, P) , <u>indépendantes</u>, et admettant la même espérance m et la même variance σ^2. On définit leur moyenne Z_n par:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors $Z_n \xrightarrow[n\infty]{} m$ en proba.

On n'exige pas que les variables aient même loi.

Application: Th. de Bernoulli. Soient des variables de Bernoulli <u>indépendantes</u>, associées à la répétition de la même expérience aléatoire (pour la quelle on s'intéresse à une événement appelé succès et noté S):

$$X_n = \begin{cases} 0 \text{ si à la n° épreuve on a } \overline{S} \\ 1 \text{ si à la n° épreuve on a } S \end{cases}$$

En notant p=P(S), on a∀n∈ℕ*, $X_n \sim B(p)$, et:

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\infty]{} p$ en probabilités.

Le nombre moyen de succès obtenu aux n premières épreuves tend à se stabiliser autour de p, ie P(S) ≃ p.

<u>RABE: Cas de n variables aléatoires réelles.</u>

<u>Cas général:</u>

Def : **n v.a.r.** $X_1, ...X_n$ (définies sur le même espace) sont **indépendantes** si pour tout $I \subset [\![1;n]\!]$, pour toute <u>famille de boréliens</u> $(B_i)_{i\in I}$:

$$P\left(\bigcap_{i\in I}(X_i \in B_i)\right) = \prod_{i\in I} P(X_i \in B_i)$$

L'indépendance des n v.a.r. ⇒ leur indep. 2 à 2, et la réciproque est fausse.

<u>Cas de var discrètes:</u>

Def : **n v.a.r.** $X_1, ...X_n$ **discrètes** sont **indépendantes** si pour tout $I \subset [\![1;n]\!]$, pour toute $(B_i)_{i\in I}$ de $\underline{(X_i(\Omega))_{i\in I}}$

$$P\left(\bigcap_{i\in I}(X_i \in B_i)\right) = \prod_{i\in I} P(X_i \in B_i)$$

L'indépendance des n v.a.r. ⇒ leur indep. 2 à 2, et la réciproque est fausse.

Prop : *(admise)* Si $X_1, ...X_n$ sont indépendantes, alors **toute fonction** de $X_1, ...X_p$ est indépendante de toute fonction de $X_{p+1}, ...X_n$ *(ex: X, Y,Z indep ⇒X^2 et Y+Z indep)*

Par exemple, si X et Y sont indep., alors X^2 et Y le sont .

<u>Covariance de n var discrètes</u>:

Prop: $\forall (X_1;...X_n) \in (F_2)^n$,

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{2\le i<j\le n} Cov(X_i;X_j)$$

Si les $X_1,...X_n$ sont indep. deux à deux, alors $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$.